1. $X_1, \cdots, X_n \sim U(0, \theta)$

(1) θ 的 MLE $\hat{\theta}_M$

(2) θ 的 UMVUE $\hat{\theta}_u$

(3) $\hat{\theta}_2 = \frac{n+2}{n+1} X_{(n)}$

证 $MSE\{\hat{\theta}_2\} \le \min\{MSE(\hat{\theta}_M), MSE(\hat{\theta}_u)\}$

2. **16.** 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为分别来自下列概率密度函数的 IID 样本, 试分别求出 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间:

~~(1) $f(x,\theta) = 1, \theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2}$;~~

~~(2) $f(x,\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, 0 < x < \theta, \theta > 0$;~~

(3) $f(x,\theta) = \frac{\theta}{x^2}, 0 < \theta < x$.

3. 43. 在正则条件下，请证明 Fisher 信息量 $I(\theta) = -E_\theta \frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta^2}$.

4. 13. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 IID 样本，其中 μ, σ^2 为未知参数。试证明：关于假设

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2$$

的似然比检验就是检验统计量为 $\chi^2 = (n-1)S_n^2/\sigma_0^2$ 的 χ^2 检验，其中 S_n^2 为样本方差。

5.

$H_0: \mu_1 = c\mu_2$

6. **22.** 考虑假设 $H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1$, 其中 $\theta_1 \ne \theta_0$. 令 $\alpha \in (0,1)$. 假定 $\phi^*(\boldsymbol{X})$ 为假设 $H_0 \longleftrightarrow H_1$ 的大小为 α 的 [redacted]MPT 且 $\beta(\theta_1, \phi^*) < 1$. 证明 $1 - \phi^*(X)$ 是假设 $H_1 \longleftrightarrow H_0$ 的大小为 $1 - \beta(\theta_1, \phi^*)$ 的 [redacted]MPT.

7. 刀切法 (jackknife) 为减少估计量偏差的一个方法 (Quenouille, 1956)。一个一步 jackknife (one-step jackknife) 估计量定义方式如下。令 $X_1, \ldots, X_n$ 为一组随机样本, 设 $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ 为参数 θ 的某估计量。为了对 T_n 采用刀切法, 我们计算 n 个统计量 $T_n^{(i)}, i = 1, \ldots, n$, 其中 $T_n^{(i)}$ 计算方式与 T_n相同, 但利用的是移除 X_i 的 $n-1$ 个观测值进行计算。 θ 的 jackknife 估计量记作 $JK(T_n)$ ，表示方式如下

$$JK(T_n) = nT_n - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_n^{(i)}.$$

特别地, 令 $X_1, \ldots, X_n$ 为 iid Bernoulli(θ) 的, 目标是估计 θ^2 。

(a) 证明 θ^2 的 MLE 为 θ^2 的有偏估计。

~~(b) 由 MLE 导出一步 jackknife 估计量。~~

(c) 证明这个一步 jackknife 估计量为 θ^2 的无偏估计。(一般来说, jackknife 只是减少偏差, 在特例中, 它完全消除了偏差。)

~~(d) 这个 jackknife 估计量是否为 θ^2 的最佳无偏估计? 如果是, 请证明结论;如果不是, 请求出 θ^2 的最佳无偏估计。~~

8. 给出一个生成 iid $N(0,1)$ 样本的方法，并证明其有效性

给出至少一个检验它是 $N(0,1)$ 的样本的方法