

25.26-1 随机分析期末

1. (Jensen不等式) 设 ϕ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的可积随机变量, \mathcal{G} 是 \mathcal{F} 下的子事件域, ϕ 是凸

(2') 函数, 且 $\phi(\phi)$ 可积. 证明 $E[\phi(\phi) | \mathcal{G}] \geq \phi(E[\phi | \mathcal{G}])$.

(1) 叙述鞅的定义 (5')

2. (2) (5') 叙述停时的定义

(3) (10') 设 τ 和 σ 为停时, 证明: $\tau + \sigma$ 和 $\max(\tau, \sigma)$ 都是停时

3. (20') 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是一个布朗运动. 证明: $B_t^2 - 2tB_t$ 是鞅

4. (5') Itô公式

(15') 计算 $\int_0^t B_s dB_s$

5. (5') 写出 Itô 扩散过程 $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ 的生成元

(15') 证明 OU 过程 $dX_t = -X_t dt + \sqrt{2} dB_t$ 的不变测度为正态分布